Ερώτηση SOS?

17/05/2019

# Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

__Υπενθύμιση__: Έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του Ευκλείδειου χώρου $(E, <,>)$, όπου $\dim_{\mathbb{R}} E < \infty$, τότε υπάρχει μοναδικός ενδομορφισμός $f^*: E \to E$ ο __προσαρτημένος__ ή __συζυγής__ του $f$, έτσι ώστε $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$: $\langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, f^*(\vec{y}) \rangle$

• Ο $f$ καλείται αυτοπροσαρτημένος $\Leftrightarrow f^* = f \overset{\text{ορισμός}}{\Leftrightarrow}$ ο πίνακας του $f$ σε μια ΟΚΒ είναι συμμετρικός.

• Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε $\forall X, Y \in \mathbb{R}_n$: $\langle AX, Y \rangle = \langle X, {}^tAY \rangle$.

---

__Παρατήρηση__: Έστω $f: E \to E$ ένας αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός του $E$, και έστω $\vec{x}, \vec{y}$ ιδιοδιανύσματα του $f$ που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε $\vec{x} \perp \vec{y}$. Πράγματι, θα έχουμε $\begin{cases} f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}, \text{ όπου } \vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0} \text{ και } \lambda \neq \mu \\ f(\vec{y}) = \mu\vec{y} \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle &= \langle \lambda\vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \\ \langle \vec{x}, f^*(\vec{y}) \rangle &= \langle \vec{x}, f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \mu\vec{y} \rangle = \mu \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \mu \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \Leftrightarrow (\lambda - \mu)\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0, \text{ και από υπόθεση } \lambda \neq \mu.$$

Άρα $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ και δηλαδή $\vec{x} \perp \vec{y}$.

---

__Πρόταση__: Αν $A$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας πραγματικών αριθμών, τότε όλες οι ιδιοτιμές του $A$ είναι πραγματικές.

__Απόδειξη__: Έστω $\rho \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε $\exists Z \in \mathbb{C}_n$: $AZ = \rho Z$, όπου $Z \neq 0$.

$\rho = c + di$, όπου $c, d \in \mathbb{R}$, και $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, όπου $z_i = x_i + iy_i$, $1 \leq i \leq n$ και $x_i, y_i \in \mathbb{R}$.

Τότε $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X + iY$, όπου $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_n$

Θα δείξουμε ότι $\boxed{d = 0}$. Θα έχουμε $AZ = \rho Z \Rightarrow A(X + iY) = (c + di)(X + iY) \rightarrow (A - (c+di)I_n)(X + iY) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow AX - cX + dY + iAY - ciY - diX = 0 \Rightarrow (AX - cX + dY) + i(AY - cY - dX) = 0 \Rightarrow \begin{cases} AX - cX + dY = 0 \\ AY - cY - dX = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \langle AX - cX + dY, Y \rangle = 0 \\ \langle AY - cY - dX, X \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle AX, Y \rangle - c\langle X, Y \rangle + d\langle Y, Y \rangle = 0 \\ \langle AY, X \rangle - c\langle Y, X \rangle - d\langle X, X \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\langle AX, Y \rangle = \langle X, {}^tAY \rangle = \langle X, AY \rangle = \langle AY, X \rangle$ ως συμμετρικός (*)

$\underline{(*)} \Rightarrow \begin{cases} \langle AX, Y\rangle - c\langle X, Y\rangle + d\langle Y, Y\rangle = 0 \\ \langle AX, Y\rangle - c\langle X, Y\rangle - d\langle X, X\rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow d\langle Y, Y\rangle = -d\langle X, X\rangle \Rightarrow d(\langle Y, Y\rangle + \langle X, X\rangle) = 0$

$\Rightarrow d(\|X\|^2 + \|Y\|^2) = 0 \Rightarrow d = 0$ ή $\|X\|^2 + \|Y\|^2 = 0$. Αν $\|X\|^2 + \|Y\|^2 = 0 \Rightarrow \|X\| = \|Y\| = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow X = Y = 0$. Τότε όμως $Z = X + iY = 0$ άτοπο, διότι η $Z$ ιδιοδιάνυσμα του $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\rho$.
Άρα αναγκαστικά $d = 0 \Rightarrow \rho = c + id = c \in \mathbb{R}$

Άρα η τυχούσα ιδιοτιμή $\rho$ του $A$ είναι πραγματική $\Rightarrow$ Όλες οι ιδιοτιμές του $A$ είναι πραγματικές. ■

**Πόρισμα** Όλες οι ιδιοτιμές ενός αυτοπροσαρτημένου ενδομορφισμού $f: E \to E$ είναι πραγματικές.

**Απόδειξη** Ο $f$ αυτοπροσαρτημένος $\Rightarrow \forall$ ΟΚΒ $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ του $E$ $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ είναι συμμετρικός, και γνωρίζουμε ότι γενικά: ιδιοτιμές ενός ενδομορφισμού $\equiv$ ιδιοτιμές του πίνακα του ενδομορφισμού σε τυχούσα βάση.
Από την πρόταση, όλες οι ιδιοτιμές του $A$ είναι πραγματικές $\Rightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές του $f$ είναι πραγματικές. ■

**Ορισμός** Ο ενδομορφισμός $f: E \to E$ καλείται ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος $\Leftrightarrow \exists$ ΟΚΒ $\mathcal{B}$ του $f$ στην οποία ο πίνακας του $f$ είναι διαγώνιος.
Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ καλείται ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος $\Leftrightarrow \exists$ ορθογώνιος πίνακας $P$: ${}^{t}P A P$ διαγώνιος.

$\boxed{\text{Φασματικό Θεώρημα}}$ Κάθε αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός ενός Ευκλείδειου Χώρου πεπερασμένης διάστασης είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος.

**Απόδειξη** Έστω $f: E \to E$ ένας αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός του Ευκλείδειου Χώρου $(E, \langle,\rangle)$, όπου $\dim_{\mathbb{R}} E = n < \infty$. Θ.δ.ο. υπάρχει ΟΚΒ $\mathcal{B}$ του $E$: ο πίνακας του $f$ στην $\mathcal{B}$ να είναι διαγώνιος.
Η απόδειξη του ισχυρισμού θα γίνει με χρήση επαγωγής στην διάσταση $n = \dim_{\mathbb{R}} E$.
- Αν $n = 1$, τότε η $E$ έχει μια βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e}\}$, όπου $\vec{e} \neq \vec{0}$, $\vec{e} \in E$, και τότε θέτοντας $\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|}$, έχουμε $\mathcal{B}: \{\vec{\varepsilon}\}$ ΟΚΒ του $E$. Τότε $f(\vec{\varepsilon}) = \lambda\vec{\varepsilon}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, και τότε $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = (\lambda)$ διαγώνιος $\Rightarrow$ ο $f$ ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος

- **Επαγωγική Υπόθεση** Κάθε αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός ενός Ευκλείδειου Χώρου $E$, διάστασης $< n$, είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος.

- **Γενική Περίπτωση** Θα δείξουμε ότι ο αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός $f: E \to E$, όπου $\dim_{\mathbb{R}} E = n$, είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος.
Γνωρίζουμε ότι ο $f$ έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο $\mathbb{R}$. Έστω $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ μια ιδιοτιμή του $f$: $\exists\, \vec{x}_1 \in E$, $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$: $f(\vec{x}_1) = \lambda_1 \vec{x}_1$. Θέτουμε $\vec{e}_1 = \frac{\vec{x}_1}{\|\vec{x}_1\|}$.
Τότε $\vec{e}_1$ μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα του $f$ και θέτουμε $V =$ ο υπόχωρος του $E$ ο οποίος παράγεται από το $\vec{e}_1$ και τότε: $E = V \oplus V^{\perp}$

Επειδή $\dim V = 1$, έχουμε ότι $\dim V^{\perp} = n-1$, δηλαδή ο $V^{\perp}$ είναι ένας Ευκλείδειος Χώρος διάστασης $n-1<n$.

Έστω $\vec{x}\in V^{\perp}$. Τότε $\langle \vec{e}_1,\vec{x}\rangle = 0$ και τότε θα έχουμε $\langle \vec{e}_1, f(\vec{x})\rangle = \langle f(\vec{x}),\vec{e}_1\rangle = \langle \vec{x}, f^{*}(\vec{e}_1)\rangle = \langle \vec{x}, f(\vec{e}_1)\rangle =$
$= \langle \vec{x}, \lambda_1\vec{e}_1\rangle = \lambda_1\langle \vec{x},\vec{e}_1\rangle = \lambda_1 \langle \vec{e}_1,\vec{x}\rangle^{\nearrow 0} = 0$. Άρα $f(\vec{x})\in V^{\perp}$. Άρα μπορούμε να ορίσουμε τον ενδομορφισμό $g = f|_{V^{\perp}}: V^{\perp} \longrightarrow V^{\perp}$, $g(\vec{x}) = f(\vec{x})$. Επειδή $f^{*}=f$, έπεται ότι $g^{*}=g$, δηλαδή ο $g$ είναι ένας αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός του Ευκλείδειου Χώρου $V^{\perp}$, και $\dim V^{\perp} = n-1<n$. Άρα από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει ΟΚΒ $\vec{e} = \{\vec{e}_2,\vec{e}_3,\dots,\vec{e}_n\}$ του $V^{\perp}$ έτσι ώστε ο πίνακας του $g$ στην $\vec{e}$ είναι διαγώνιος, δηλαδή υπάρχουν $\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $g(\vec{e}_i)=\lambda_i\vec{e}_i$, $2\le i\le n \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\vec{e}_i)=\lambda_i\vec{e}_i$, $2\le i\le n$.

Επειδή $E = V\oplus V^{\perp}$ έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1\}\cup\{\vec{e}_2,\vec{e}_3,\dots,\vec{e}_n\}$ είναι ΟΚΒ του $E$, έτσι ώστε $f(\vec{e}_i)=\lambda_i\vec{e}_i$, $1\le i\le n$ και τότε $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ διαγώνιος ∎

**Φασματικό Θεώρημα (για πίνακες)**: Κάθε συμμετρικός πίνακας $A$ πραγματικών αριθμών είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος: $\exists$ ορθογώνιος πίνακας $P$: ${}^{t}P\cdot A\cdot P$ διαγώνιος.

<u>Απόδειξη</u>: Θεωρούμε τον ενδομορφισμό $f_A: \mathbb{R}_n\to\mathbb{R}_n$, $f_A(X) = AX$ και τότε γνωρίζουμε ότι ο πίνακας του $f_A$ στην ορθοκανονική βάση $\left\{E_1=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\dots,E_n=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}\right\}=\mathcal{B}$ είναι ο $A$ ο οποίος είναι συμμετρικός. Άρα ο $f_A$ είναι αυτοπροσαρτημένος.

Από το Φασματικό Θεώρημα για αυτοπροσαρτημένους ενδομορφισμούς έπεται ότι υπάρχει ΟΚΒ $\mathcal{C}=\{E_1',\dots,E_n'\}$ του $\mathbb{R}_n$:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f_A) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix} \overset{\text{ορ.}}{=} B$$

Οι πίνακες $A, B$ είναι τότε όμοιοι, και αν θέσουμε $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ ο πίνακας μετάβασης από την βάση $\mathcal{B}$ στην βάση $\mathcal{C}$, τότε

$P^{-1}\cdot A\cdot P = B$ διαγώνιος. Όμως, επειδή οι βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ ΟΚΒ, έπεται ότι $P$ ορθογώνιος και τότε γνωρίζουμε ότι $P^{-1} = {}^{t}P$. Άρα υπάρχει ορθογώνιος πίνακας $P$: ${}^{t}P\cdot A\cdot P$ διαγώνιος ∎

(05)

**Διαδικασία Ορθογώνιας Διαγωνοποίησης Συμμετρικού Πίνακα**:

① Εύρεση χαρακτηριστικού πολυωνύμου και ιδιοτιμών του $A$

② Περιγραφή των αντίστοιχων ιδιοχώρων $V(\lambda_i)$.

③ Εύρεση ορθοκανονικών βάσεων σε καθέναν από τους $V(\lambda_i)$ και τότε η ένωση των βάσεων αυτών δίνει μια ΟΚΒ $\mathcal{C}=\{E_1',E_2',\dots,E_n'\}$ του $\mathbb{R}_n$.

④ Θέτουμε $P = (E_1'\ E_2'\ \dots\ E_n')$ ορθογώνιος πίνακας και: ${}^{t}P\cdot A\cdot P = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & & \lambda_n\end{pmatrix}$

<u>Παράδειγμα</u>: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (3x-z,\ 2y,\ -x+3z)$

$B = \{\vec{e_1} = (1,0,0),\ \vec{e_2} = (0,1,0),\ \vec{e_3} = (0,0,1)\}$ κανονική (ΟΚΒ) βάση του $\mathbb{R}^3$, και

$f(\vec{e_1}) = f(1,0,0) = (3,0,-1)$

$f(\vec{e_2}) = f(0,1,0) = (0,2,0)$

$f(\vec{e_3}) = f(0,0,1) = (-1,0,3)$

Προκύπτει $A = M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ συμμετρικός. Επειδή $B$ ΟΚΒ, έπεται ότι η $f$ αυτοπροσαρτημένη ~~σ.ο~~ ή $f$ διαγωνοποιείται ορθογώνια

$$P_f(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & -1 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -1 & 0 & 3-t \end{vmatrix} = (2-t)\left((3-t)^2 - 1\right) = (2-t)(t^2 - 6t + 9 - 1) = (2-t)(t^2 - 6t + 8) =$$

$= -(t-2)^2(t-4)$ Ιδιοτιμές του $f$: $\lambda_1 = 2$ (διπλή)

$\lambda_2 = 4$ (απλή)

• $V(2)$: $(A - 2I_3)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{\ x = z$

Άρα $V(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x = z \\ y \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ Οι πίνακες είναι ΓΑ και άρα αποτελούν βάση του $V(2)$ η οποία είναι ορθογώνια.

Άρα το σύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ΟΚΒ του $V(2)$

(4): $(A-4I_3)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-x-z=0\\-2y=0\\-x-z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}z=-x\\y=0\end{cases}$

Άρα $V(4)$ $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}_3 \;\middle|\; \begin{matrix}z=-x\\y=0\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\0\\-x\end{pmatrix}\in\mathbb{R}_3 \;\middle|\; x\in\mathbb{R}\right\} \Rightarrow \left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$ βάση του $V(4)$ και

άρα $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ ΟΚΒ του $V(4)$.

Άρα έχουμε βρει την ζητούμενη ΟΚΒ του $\mathbb{R}^3$: $\varsigma=\{\vec{\varepsilon}_1'=(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}),\ \vec{\varepsilon}_2'=(0,1,0),\ \vec{\varepsilon}_3'=(1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2})\}$

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix} \blacksquare$$

Παράδειγμα $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ ① $P_A(t)=|A-tI_3|=-t(t-3)^2$

Ιδιοτιμές $\lambda_1=0$ (απλή)

$\lambda_2=3$ (διπλή)

②, ③ $V(0)$: $(A-0I_3)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases}2x-y-z=0\\-x+2y-z=0\\-x-y+2z=0\end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ λύση συστήματος $\Rightarrow V(0)=\left\{\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}\in\mathbb{R}_3 \;\middle|\; x\in\mathbb{R}\right\}$ και τότε $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ βάση του $V(0)$ και

$\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}=\varepsilon_1'$ είναι ΟΚΒ του $V(0)$

$V(3) = (A - 3I_3)X = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{cases} -x-y-z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \rightarrow x+y+z=0$ και τότε οι στήλες $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

είναι βάση του $V(3)$ η οποία δεν είναι ΟΚΒ, διότι $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \neq 0.$

Από διαδικασία Gram-Schmidt, το σύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2\sqrt{3} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2}/2\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$ : ΟΚΒ του $V(3)$

④ Θέτουμε $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Τότε $P$ ορθογώνιος έτσι ώστε:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \blacksquare$$